ANÁLISIS MATEMÁTICO II

PRIMER PARCIAL - CURSO DE VERANO

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

APELLIDO DEL ALUMNO:

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas con el procedimiento analítico adecuado para ser tenida en cuenta. **<u>No resolver el examen en lápiz</u>.** Duración del examen: 2 horas.

Condición de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto. (uno de T1 o T2 y dos P1, P2, P3 o P4)

T1) a) Defina mínimo absoluto de un campo escalar $f: \mathbf{D} \subseteq R^2 \to R \ / \ z = f(x, y)$ en el conjunto D.

b) Determine los extremos locales, si existen, para el campo escalar $f: R^2 \to R$ tal que $f(x, y) = x^2y^2 + y^2 - 4x^2 + 5y - 3$ e indique en que puntos se producen.

T2) a) Defina la derivada direccional de un campo escalar $f: \mathbf{D} \subseteq R^2 \to R$ en un punto $\overrightarrow{x_0}$.

b) La función definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$ admite todas las derivadas direccionales en el punto (0,0) pero es discontinua en él.

P1) Determinar $k \in R$ de manera que las familias $y^3 = Ax$ e $x^2 + ky^2 = B^2$ sean ortogonales.

P2) Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + y^2}{x^4 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0,0) \end{cases}$

a) Estudie la continuidad en el origen.

b) Analicé la existencia de las derivadas parciales de f en el origen.

P3) Sea $g: R^2 \to R$,diferenciable, tal que su plano tangente en (2,1) es $z = 2x - 3y$. Si $f: R^2 \to R$ la función dada por $f(x, y) = g(x + x^2; 2y - 1)$. Calcular plano tangente de $f(x, y)$ en el $(1,1)$.

P4) Dada la ecuación $xz + z^3y + ln(z + x - 2) - 2 = 0$ define de forma implícita a $z = f(x, y)$, se pide calcular aproximadamente $f(0{,}98; 0{,}03)$.

AM2	1° parcial curso de verano	1/3 2025

T1 a) Definir mínimo absoluto de un campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $z = f(x,y)$ en el conjunto D

$\bar{A} \in D$, $f(\bar{A}) \geq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in D \rightarrow f(\bar{A})$ es máximo absoluto

b) Determinamos los extremos locales, si $\exists$, para que el campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y) = x^2y^2 + y^2 - 4x^2 + 5y - 3$ e indicar en qué puntos se producen

f es dif $\Rightarrow$ busco $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ / $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 2xy^2 - 8x = 0 = 2x(y^2-4) \longrightarrow x = 0 \lor |y| = 2 \\ f'_y = 2x^2y + 2y + 5 = 0 \quad * \end{cases}$$

* si $x = 0$: $2y + 5 = 0 \rightarrow y = -5/2 \longrightarrow \boxed{PC_1 = (0, -5/2)}$

* si $y = 2$: $2x^2 2 + 2 \cdot 2 + 5 = 0 \rightarrow 4x^2 = -9$, $\nexists x \in \mathbb{R} \rightarrow \boxed{y \neq 2}$

* si $y = -2$: $2x^2(-2) + 2(-2) + 5 = 0 \rightarrow -4x^2 = -1 \rightarrow |x| = 1/2$

$\boxed{PC_2 = (1/2, -2) \quad PC_3 = (-1/2, -2)}$

Criterio del hessiano

$f''_{xx} = 2y^2 - 8$

$f''_{xy} = 4xy \quad \rightarrow H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y^2-8 & 4xy \\ 4xy & 2x^2+2 \end{pmatrix}$

$f''_{yy} = 2x^2 + 2$

$$|H(0,-5/2)| = \begin{vmatrix} 2\cdot(-5/2)^2 - 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9 > 0 \Rightarrow \text{es Extremo}$$

$f''_{xx} = \frac{9}{2} > 0 \rightarrow$ es mínimo

$\boxed{f(0,-5/2) = -\frac{37}{4} \text{ es mínimo relativo}}$

$$|H(\tfrac{1}{2},-2)| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 5/2 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0 \quad \text{No hay extremo}$$

$$|H(-\tfrac{1}{2},-2)| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 5/2 \end{vmatrix} = -16 < 0 \quad \text{" " "}$$

$\left.\begin{matrix} \left(\frac{1}{2}, -2, f(\frac{1}{2},-2)\right) \\ \text{y} \left(-\frac{1}{2}, -2, f(-\frac{1}{2},-2)\right) \end{matrix}\right\}$ Son puntos silla

T2 a) Definir ~~clara~~ la derivada direccional de un campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $\vec{x}_0$

$$f'(\bar{x}_0, \check{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\check{v}) - f(\bar{x}_0)}{h}$$

b) La función definida por $f(x,y) \begin{cases} x/y & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$ admite todas las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$ pero es discontinua en el

Continuidad

- $f(0,0) = 0$
- ¿$\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$? $\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \xrightarrow{y \neq 0} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y} \overset{si\ x=y}{=} \lim_{x,y\to 0} \frac{y}{y} = 1$

$\underset{x=0}{\to} = \lim = 0$ $\Big\} \nexists$

$\boxed{f \text{ no es cont. en } (0,0)} \Leftarrow \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}$

Hallo las derivadas direccionales

$$f'((0,0),(a,b)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a,b)) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \ (*)$$

$(*)$ si $b \neq 0 \to \lim_{h\to 0} \frac{ha}{hb} \cdot \frac{1}{h}$ $\begin{cases} \xrightarrow{si\ a=0} 0 \\ \xrightarrow{a \neq 0} \infty \end{cases}$

$\boxed{f \text{ No es derivable porque } \nexists f'((0,0),(a,b))}$
$\boxed{si\ b \neq 0 \wedge a \neq 0}$

F

AM 2	1º parcial	2/3
	curso de verano	

(P1) Determinar $k \in \mathbb{R}$ de manera que las familias $y^3 = Ax$ e $x^2 + ky^2 = B^2$ sean ortogonales.

① $y^3 = Ax$ $\quad$ $\boxed{y}$ es función $\rightarrow 3y^2 \cdot y' = A = \frac{y^3}{x}$

$A = \frac{y^3}{x}$

$y'_1 = \frac{y^{\cancel{3}}}{3\cancel{y^2}x} \rightarrow \boxed{y'_1 = \frac{y}{3x}}$

$\boxed{y'_{\perp_1} = \frac{-3x}{y}}$

② $x^2 + ky^2 = B^2$

$\hookrightarrow 2x + 2kyy'_2 = 0$

$y'_2 = \frac{-2x}{2ky} \longrightarrow \boxed{y'_2 = \frac{-x}{2ky}}$

$\Big\rangle \; //$

$\frac{-3\cancel{x}}{\cancel{y}} = \frac{-\cancel{x}}{2k\cancel{y}} \rightarrow 3 \times 2k = 1 \rightarrow \boxed{k = 1/6}$

(P2) Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy + y^2}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) estudiar continuidad en el origen

• $f(0,0) = 0$

• ¿$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^2}{x^4 + y^2}$

$\xrightarrow{\text{si } y=0} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0$

$\xrightarrow{\text{si } x=0} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} = 1$

$\Big\rangle \neq \quad \nexists \lim$

$\nexists \lim \Rightarrow \boxed{f \text{ no es continua en } (0,0)}$

b) Analizar la existencia de derivadas parciales de f en el origen

$f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot 0 = 0$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(0,h)) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^2}{h^2} = \infty$

$\boxed{f'_x(0,0) = 0}$

$\boxed{\nexists f'_y(0,0)}$

(P3) Sea $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciable, tal que su plano tangente en $(2,1)$ es $z = 2x-3y$. Si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x,y) = g(x+x^2; 2y-1)$

Calcular el plano tangente de $f(x,y)$ en el $(1,1)$

$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;/\; h(x,y) = (x+x^2, 2y-1) \to f(x,y) = g(h(x,y))$

f es composición de funciones diferenciables $\to$ f es dif.

$Df(1,1) = Dg(h(1,1))\, Dh(1,1)$

- $h(1,1) = (1+1^2, 2\cdot 1-1) \to \boxed{h(2,1) = (2,1)}$

- $Df(1,1) = [f'_x(1,1) \;\; f'_y(1,1)] = Dg(2,1)\, Dh(1,1)$

- $Dh(1,1) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\to Df(1,1) = Dg(2,1)\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- <u>Hallo $Dg(2,1)$</u>: $\quad \underbrace{z = 2x-3y}$ $= g(2,1) + g'_x(2,1)(x-2) + g'_y(2,1)(y-1)$

$\to \begin{cases} g'_x(2,1) = 2 \\ g'_y(2,1) = -3 \end{cases}$

$[f'_x(1,1) \;\; f'_y(1,1)] = [2 \;\; -3]\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = [6 \;\; -6]$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'_x(1,1) = 6 \\ f'_y(1,1) = -6 \end{array}}$$

Pl. tg a la gráfica de $f(1,1)$ $\qquad f(1,1) = g(h(1,1)) = \underbrace{g(2,1)}_{\text{uso plano tangente}} = 1$

$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) =$

$= 1 + 6(x-1) - 6(y-1) = 1+6x-\cancel{6}-6y+\cancel{6}$

$$\boxed{z = 6x - 6x + 1}$$

$z = g(2,1) = 2\times 2 - 3\times 1 = 1$

AM2	1° parcial curso verano	3/3 2025

(P4) Dada la ec. $xz + z^3 y + \ln(z + x - 2) - z = 0$ define, de forma implícita, a $z = f(x,y)$, se pide calcular, aprox, $f(0.98; 0.03)$

T.F.I: $G(x,y,z) = xz + z^3 y + \ln(z + x - 2) - z$

$$f'_x(1,0) = -\frac{G'_x(1,0,f(1,0))}{G'_z(1,0,f(1,0))}$$

$$f'_y(1,0) = -\frac{G'_y(1,0,f(1,0))}{G'_z(1,0,f(1,0))}$$

$f(1,0)$

$$G(1,0,z) = 0 = z + \ln(z-1) - z = z + \ln(z-1) - z = 0 \rightarrow \boxed{z = 2}$$

$$G'_x = z + \frac{1}{z+x-2} \longrightarrow G'_x(1,0,2) = 3$$

$$G'_y = z^3 \longrightarrow G'_y(1,0,2) = 8$$

$$G'_z = x + 3z^2 y + \frac{1}{z+x-2} \rightarrow G'_z(1,0,2) = 2$$

$$\boxed{f'_x(1,0) = -\frac{3}{2} \quad f'_y(1,0) = -4}$$

$$z = \underbrace{f(1,0)} + f'_x(1,0) \cdot (x-1) + f'_y(1,0) \cdot y =$$

$$= 2 - \frac{3}{2}(x-1) - 4y$$

$$f(x,y) = z$$

$$f(0.98; 0.03) \cong 2 - \frac{3}{2}(0.98-1) - 4(0,03) = \frac{191}{100}$$

$$\boxed{f(0.98; 0.03) \cong 1,91}$$